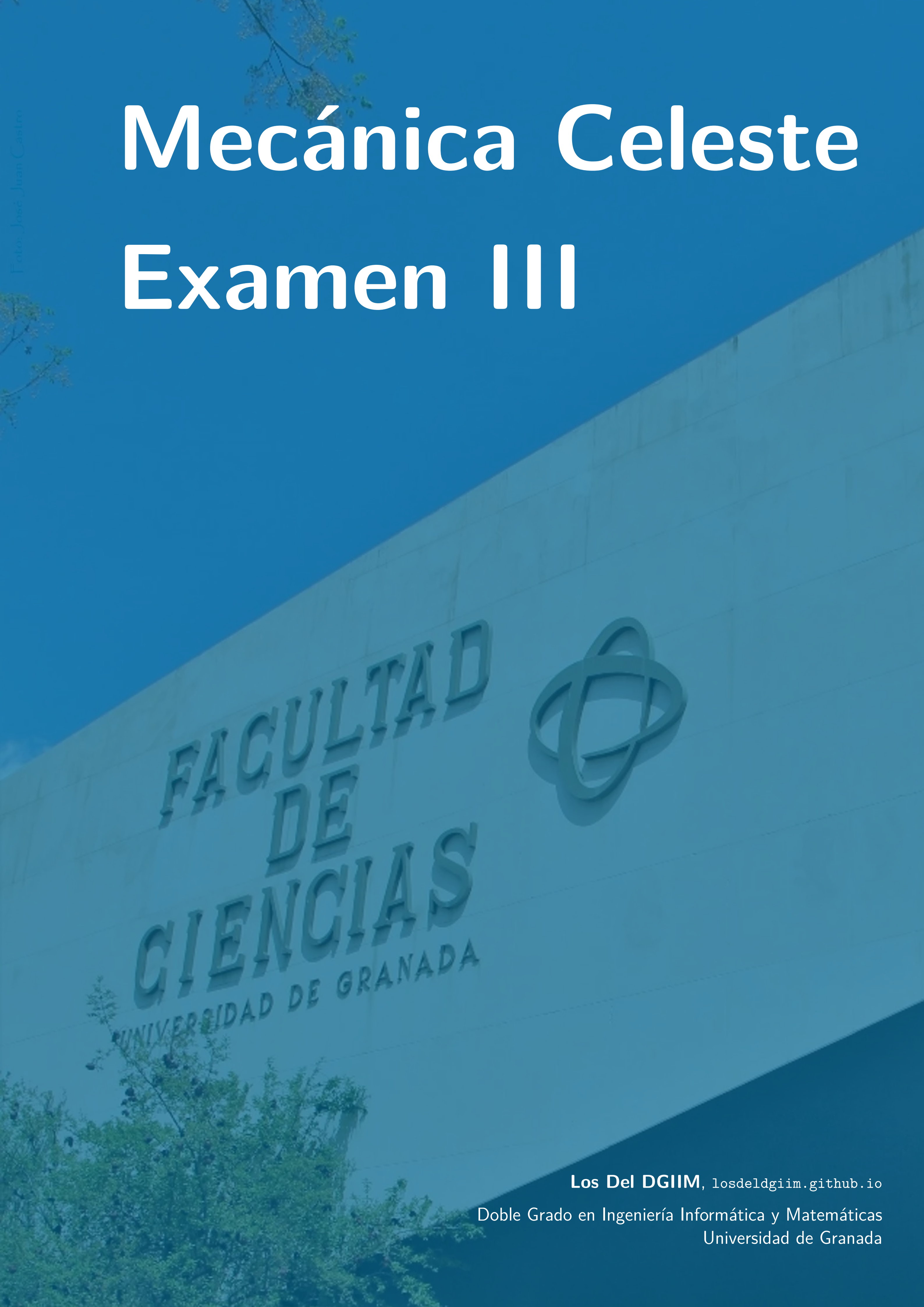


Mecánica Celeste
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Mecánica Celeste
Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Manuel Sánchez Varbas

Granada, 2025

Asignatura Mecánica Celeste.

Curso Académico 2023-24.

Grado Grado en Matemáticas.

Grupo A.

Descripción Extraordinaria.

Fecha 14 de Febrero de 2024.

El número entre corchetes es la puntuación máxima de cada ejercicio o apartado.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** De un planeta que se mueve bajo la acción de un Sol de masa M situado en el origen de coordenadas se conoce su posición y su velocidad en un determinado instante. Supuesto que $GM = 1$, determina el movimiento que describe si

a) $x(t_0) = (1, 2, -1), \quad \dot{x}(t_0) = (-1, -2, 1)$

b) $x(t_0) = (1, 2, -1), \quad \dot{x}(t_0) = (-1, 0, 1)$

Ejercicio 2 (4 puntos)**.** Desde un observatorio astronómico fijo se está observando el movimiento de dos asteroides aislados que se mueven bajo la acción de la ley de gravitación de Newton. Cuando se comienzan las observaciones, sus posiciones respecto al observatorio son $x(0) = (0, 1, -1)$, $y(0) = (0, -3, 3)$, y las velocidades con las que se mueven son $\dot{x}(0) = (1, 1, -1)$, $\dot{y}(0) = (1, -3, -1)$. Se estima que la masa del asteroide que ocupa la posición x es el triple de la del que está en la posición y. Se pide:

a) [1] Deduce el comportamiento del centro de masas del sistema que se observa desde la posición del observatorio.

b) [1] Determina el movimiento que se observará desde el centro de masas en función de la masa m del asteroide menor.

c) [2] Explica cuál será el movimiento que vean los astrónomos desde el observatorio si la masa $m \gg 1$.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Dos masas, $m_1 = 4 \cdot 10^{24}$ Kg y $m_2 = 10^{24}$ Kg, se mueven en órbitas circulares coplanarias alrededor de su centro de masas. Se pretende colocar satélites en órbita en los puntos de libración L_4 y L_5 correspondientes a esas masas primarias, que sabemos que son estables para el problema restringido de los tres cuerpos circular. Se pide:

a) [1] Determinar la masa μ de la primaria más pequeña en las unidades apropiadas para que la masa total de las primarias sea 1 y encuentra las coordenadas de los puntos de libración L_4 y L_5 en el sistema de referencia con origen el centro de masas de las primarias, supuesto que la primaria de mayor masa se sitúa en el punto $P_1 = (-\mu, 0)$ y la otra en el $P_2 = (1 - \mu, 0)$.

b) [1] Haz un esbozo del movimiento de los tres cuerpos si el satélite se sitúa en L_4.

c) [2] Con los valores obtenidos en los apartados anteriores, probar que la función potencial

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|P_1 - z|} + \frac{\mu}{|P_2 - z|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\},$$

alcanza su mínimo absoluto en los puntos L_4 y L_5 y calcula el valor de la constante de Jacobi en esos puntos.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** De un planeta que se mueve bajo la acción de un Sol de masa M situado en el origen de coordenadas se conoce su posición y su velocidad en un determinado instante. Supuesto que $GM = 1$, determina el movimiento que describe si

a) $x(t_0) = (1, 2, -1), \quad \dot{x}(t_0) = (-1, -2, 1)$

Primero, vemos que $\dot{x}(t_0) = -x(t_0)$, es decir, ambos vectores son paralelos, luego $\widehat{x(t_0), \dot{x}(t_0)} = 0$, y $|c| = 0$. Por la teoría de clasificación de movimientos según el módulo del momento angular, sabemos que el movimiento es rectilíneo, y $x(t) = r(t)v$, con $v \equiv x(t)/|x(t)|$, $|v| = 1$, y $x(t) \in \mathbb{R}_+ v$, es decir, el movimiento se da a lo largo de la semirrecta con extremo inferior en el origen, y la dirección y sentido de v. Podemos obtener v

$$v = \frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{x(t_0)}{|x(t_0)|} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}} \parallel (1,2,-1)$$

Determinamos ahora la monotonía de r. Por estar en un c.f.c. tenemos que es conservativo, luego la energía total se conserva. En particular, basta con obtenerla en t_0, dado que ya conocemos los valores de posición y velocidad en dicho instante, y que $\mu = GM = 1$

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(t_0)|^2 - \frac{\mu}{|x(t_0)|} = \frac{1}{2}6 - \frac{1}{\sqrt{6}} = 3 - \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 2{,}59 > 0$$

Por teoría, la energía total en este tipo de movimiento también verifica

$$h = \frac{1}{2}|\dot{r}(t)|^2 - \frac{1}{|r(t)|}$$

y usando que $h > 0$

$$h = \frac{1}{2}|\dot{r}(t)|^2 - \frac{1}{|r(t)|} > 0 \iff \frac{1}{2}|\dot{r}(t)|^2 > \frac{1}{|r(t)|} \iff |\dot{r}(t)| > \sqrt{\frac{2}{|r(t)|}}$$

como $r(t) > 0 \Longrightarrow |r(t)| > 0$ y $\sqrt{\frac{2}{|r(t)|}} > 0$, luego

$$|\dot{r}(t)| > \sqrt{\frac{2}{|r(t)|}} > 0$$

En particular, $\dot{r}(t) \neq 0$ para cualquier $t > 0$. Como r es una función continua (por ser solución), entonces r es estrictamente monótona, con lo que basta obtener $\dot{r}(t_0)$ para algún $t_0 > 0$ para determinar el crecimiento o decrecimiento estricto de r. Como

$$\dot{r}(t) \overset{|v|=1}{=} \dot{r}(t)\langle v, v\rangle = \langle \dot{r}(t)v, v\rangle \overset{\dot{x}(t)=\dot{r}(t)v}{=} \langle \dot{x}(t), v\rangle$$

en particular, para t_0

$$\dot{r}(t_0) = \langle \dot{x}(t_0), v \rangle = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + (-2) \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + 1 \cdot \frac{-1}{\sqrt{6}} = \frac{-6}{\sqrt{6}} = -\sqrt{6} < 0$$

Concluimos finalmente que $\dot{r} < 0$. Por tanto, el movimiento que sigue el planeta es el segundo visto en teoría en la clasificación de movimientos rectilíneos.

b) $x(t_0) = (1, 2, -1), \quad \dot{x}(t_0) = (-1, 0, 1)$

Hallamos el valor del momento angular en t_0:

$$c(t_0) = x(t_0) \wedge \dot{x}(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (2, 0, 2) \Longrightarrow |c| = 2\sqrt{2} > 0$$

por tanto, como $|c| \neq 0$, por teoría sabemos que el movimiento se hará en el plano $\Pi = \{c\}^{\perp}$, es decir, aquel plano con vector normal c que pase por el origen. El plano verifica la ecuación

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0 \Longrightarrow 2x_1 + 2x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 + x_3 = 0$$

Así, la órbita de $x(t)$ queda contenida en el plano $\{x_1 + x_3 = 0\}$. Por la Primera Ley de Kepler, sabemos que será una cónica; elipse, hipérbola o parábola.

Para determinarlo, podemos usar la energía total igual que en el apartado anterior

$$h = \frac{1}{2}|\dot{x}(t_0)|^2 - \frac{\mu}{|x(t_0)|} = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{\sqrt{6}} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 0{,}59 > 0$$

Sabemos que $h > 0 \iff |e| > 1$, luego el movimiento descrito será hiperbólico.

Ejercicio 2 (2 puntos)**.** Desde un observatorio astronómico fijo se está observando el movimiento de dos asteroides aislados que se mueven bajo la acción de la ley de gravitación de Newton. Cuando se comienzan las observaciones, sus posiciones respecto al observatorio son $x(0) = (0, 1, -1)$, $y(0) = (0, -3, 3)$, y las velocidades con las que se mueven son $\dot{x}(0) = (1, 1, -1)$, $\dot{y}(0) = (1, -3, -1)$. Se estima que la masa del asteroide que ocupa la posición x es el triple de la del que está en la posición y. Se pide:

a) [1] Deduce el comportamiento del centro de masas del sistema que se observa desde la posición del observatorio.

Sabemos por teoría que $\ddot{C}(t) = 0$, o equivalentemente, $C(t) = \alpha + \beta t$, con $\alpha = C(t_0)$, $\beta = \dot{C}(t_0)$, siempre que $t_0 \in I$ pertenezca al intervalo maximal de definición[1]. El enunciado dice cuando "se comienzan las observaciones", por lo que ubicamos ahí el origen, y tomamos $t_0 = 0$. Entonces, denotando por m_1 a la masa del asteroide que ocupa la posición x, e igualmente m_2 a la masa del asteroide de posición y, se tiene que $m_1 = 3m_2$. Si $m_2 = m > 0$, se verifica $m_1 + m_2 = 4m$.

Ahora, por definición, el centro de masas es

$$C(t) = \frac{m_1 x(t) + m_2 y(t)}{m_1 + m_2}$$

y su derivada es

$$\dot{C}(t) = \frac{m_1 \dot{x}(t) + m_2 \dot{y}(t)}{m_1 + m_2}$$

Obtenemos $\alpha = C(0)$ y $\beta = \dot{C}(0)$.

$$\alpha = C(0) = \frac{3x(0) + y(0)}{4}$$

Como $3x(0) + y(0) = 3(0, 1, -1) + (0, -3, 3) = (0, 0, 0)$, entonces

$$\alpha = \frac{1}{4}(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

Análogamente, $3\dot{x}(0) + \dot{y}(0) = 3(1, 1, -1) + (1, -3, -1) = (4, 0, -4)$, luego

$$\beta = \frac{1}{4}(4, 0, -4) = (1, 0, -1)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{C(t) = (1, 0, -1)\, t}$$

[1]También por el Teorema de Existencia y Unicidad de las Ecuaciones Lineales visto en Ecuaciones Diferenciales I

b) [1] Determina el movimiento que se observará desde el centro de masas en función de la masa m del asteroide menor.

Consideramos el sistema con centro de masas fijo en el origen, utilizando el Principio de Relatividad de Galileo, $\tilde{x}(t) = x(t) - \alpha - \beta t$, $\tilde{y}(t) = y(t) - \alpha - \beta t$ donde $C(t) = \alpha + \beta t$ ya calculado en el apartado anterior.

Sabemos que entonces $(\tilde{x}, \tilde{y})$ es solución al mismo problema de los dos cuerpos y el centro de masas en este sistema verifica $\tilde{C}(t) \equiv 0$. Consecuentemente

$$m_1\tilde{x} + m_2\tilde{y} = 0 \Longrightarrow \tilde{y} = -\frac{m_1}{m_2}\tilde{x} = -3\tilde{x}$$

Si el asteroide identificado por $\tilde{x}$ sigue la cónica $|\tilde{x}| + \langle e, \tilde{x}\rangle = k$ con $e \in \mathbb{R}^3$ y $k > 0$ entonces se ha visto en teoría que el asteroide identificado por y sigue la cónica $|\tilde{y}| + \langle -e, \tilde{y}\rangle = 3k$, es decir, las dos cónicas son del mismo tipo, y los ejes de excentricidad opuestos.

El asteroide identificado por $\tilde{x}$ (visto en teoría) sigue un problema de Kepler

$$\ddot{\tilde{x}} = -G\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2}\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3} = -G\frac{m}{16}\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3} = -\mu\frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|^3}$$

Estudiamos uno de los dos asteroides, y el otro ya lo tendremos. Obtenemos el momento angular $c_{\tilde{x}}$, primero viendo que

$$\tilde{x}(0) = x(0) - \alpha = (0, 1, -1), \quad \dot{\tilde{x}}(0) = \dot{x}(0) - \beta = (0, 1, 0)$$

$$c_{\tilde{x}} = \tilde{x}(0) \wedge \dot{\tilde{x}}(0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & j & k \end{vmatrix} = (1, 0, 0) \Longrightarrow |c_{\tilde{x}}| \neq 0$$

Tenemos entonces que ambos cuerpos se moverán sobre una elipse, hipérbola o parábola, con un foco en el origen, por la Primera Ley de Kepler. Para determinar la cónica, obtenemos la energía total.

$$h = \frac{1}{2}|\dot{\tilde{x}}(0)|^2 - \frac{\mu}{|\tilde{x}(0)|}$$

Viendo que

$$|\tilde{x}(0)|^2 = 0^2 + 1^2 + (-1)^2 = 2 \Longrightarrow |\tilde{x}(0)| = \sqrt{2}$$

y

$$|\dot{\tilde{x}}(0)|^2 = 1$$

Como

$$h = \frac{1}{2}|\dot{\tilde{x}}(0)|^2 - \frac{\mu}{|\tilde{x}(0)|} = \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{Gm}{16}\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}Gm}{32}$$

el tipo de movimiento visto desde el sistema con centro de masas fijo en el origen dependerá entonces de la masa m.

- Será elíptica si y solo si

$$h < 0 \iff \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}Gm}{32} < 0 \iff \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}Gm}{32} \iff \frac{8\sqrt{2}}{G} = \frac{32}{2\sqrt{2} \cdot G} < m$$

- Será parabólica si y solo si

$$h = 0 \iff m = \frac{8\sqrt{2}}{G}$$

- Será hiperbólica si y solo si

$$h > 0 \iff m < \frac{8\sqrt{2}}{G}$$

Y el otro cuerpo seguirá la misma cónica.

c) [2] Explica cuál será el movimiento que vean los astrónomos desde el observatorio si la masa $m \gg 1$.

Si $m \gg 1$ (suponiendo unidades normalizadas), en particular

$$m \gg \frac{8\sqrt{2}}{G}$$

de donde $h \ll 0$, luego la trayectoria de ambos cuerpos será elíptica, con ejes de excentricidad opuestos. Teniendo en cuenta que los astrónomos observan desde el observatorio, y que el centro de masas está en movimiento, pues, por el apartado a), sabemos que $C(t) = (1, 0, -1)\,t$, entonces las trayectorias elípticas se producirán simultáneamente con la traslación del centro de masas a lo largo de la recta $r \equiv (1, 0, -1)t$, resultando en movimientos helicoidales descritos por ambos cuerpos a lo largo de la recta r. Esto se ha representado en la Figura 1 siguiente:

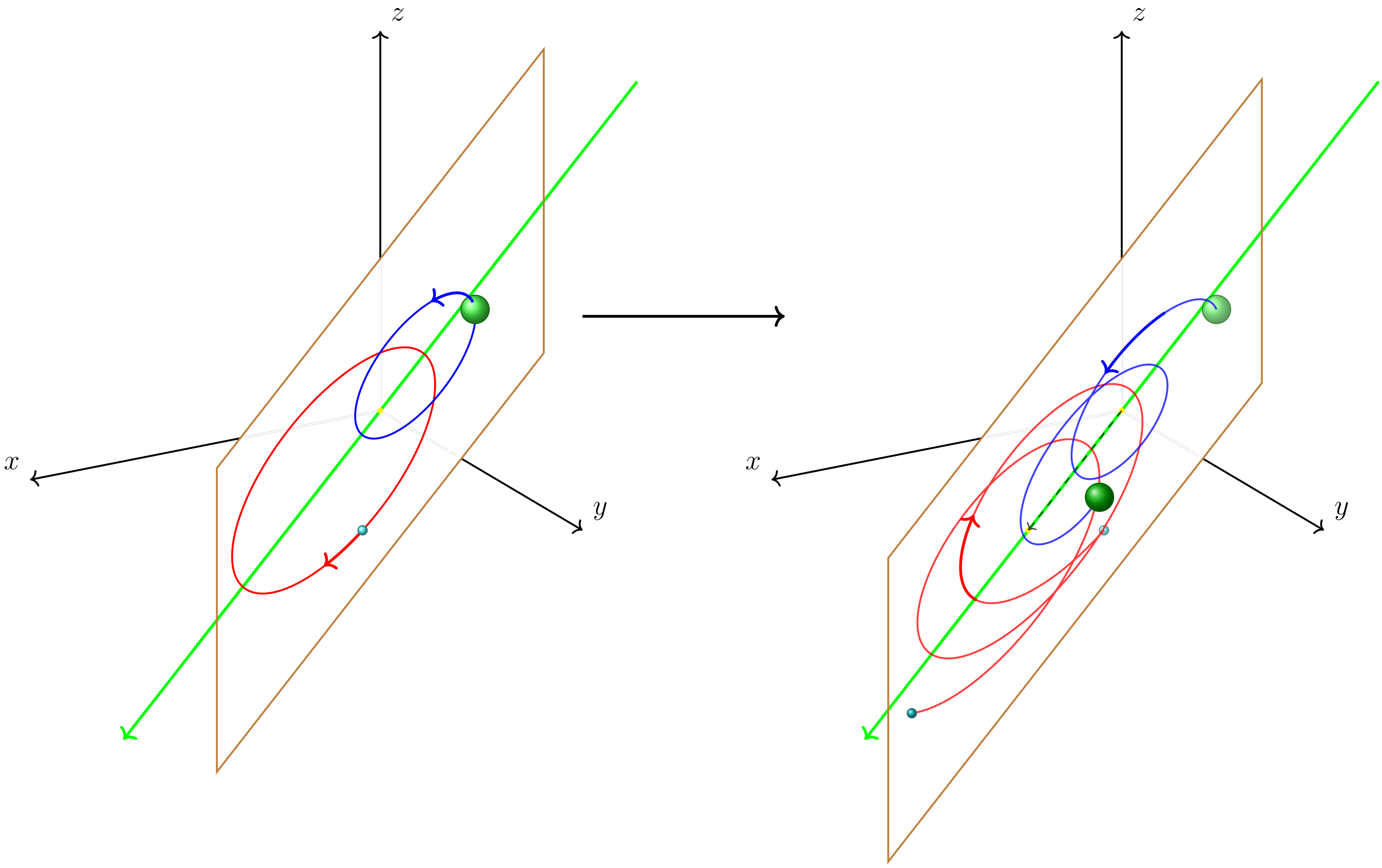


Figura 1: Situación del apartado c)

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Dos masas, $m_1 = 4 \cdot 10^{24}$ Kg y $m_2 = 10^{24}$ Kg, se mueven en órbitas circulares coplanarias alrededor de su centro de masas. Se pretende colocar satélites en órbita en los puntos de libración L_4 y L_5 correspondientes a esas masas primarias, que sabemos que son estables para el problema restringido de los tres cuerpos circular. Se pide:

a) [1] Determinar la masa μ de la primaria más pequeña en las unidades apropiadas para que la masa total de las primarias sea 1 y encuentra las coordenadas de los puntos de libración L_4 y L_5 en el sistema de referencia con origen el centro de masas de las primarias, supuesto que la primaria de mayor masa se sitúa en el punto $P_1 = (-\mu, 0)$ y la otra en el $P_2 = (1-\mu, 0)$.

Sabemos que $m_1 = 1-\mu$, $m_2 = \mu$, $\mu \in]0, 1/2]$ y $m_1 + m_2 = 1$, por lo que la masa μ en las unidades apropiadas será

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{10^{24}\,\text{Kg}}{4 \cdot 10^{24}\,\text{Kg} + 10^{24}\,\text{Kg}} = \frac{1}{5}$$

Por teoría sabemos que tanto L_4 como L_5, colocándolos como vértices, forman un triángulo equilátero de lado 1 con las primarias. Por lo tanto, los puntos de libración L_4 y L_5 son aquellos $z \in \mathbb{R}^2$ que verifican

$$|z - P_1| = |z - P_2| = |P_1 - P_2| = 1$$

Deducimos entonces que la abscisa de L_4 y L_5 está en la mediatriz de las primarias, es decir:

$$M = \frac{P_1 + P_2}{2} = \left(\frac{-\mu + 1 - \mu}{2}, 0\right) = \left(\frac{1-2\mu}{2}, 0\right) = \left(\frac{1}{2} - \mu, 0\right)$$

Denotando por $z = (x, y)$, entonces $x = 1/2 - \mu$.

Para obtener la altura, imponemos $|z - P_1| = 1$ (también se podría imponer $|z - P_2| = 1$). Como

$$z - P_1 = \left(\frac{1}{2} - \mu - (-\mu), y\right) = \left(\frac{1}{2}, y\right)$$

Entonces

$$|z-P_1| = 1 \iff |z-P_1|^2 = 1 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1 \iff y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \iff y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

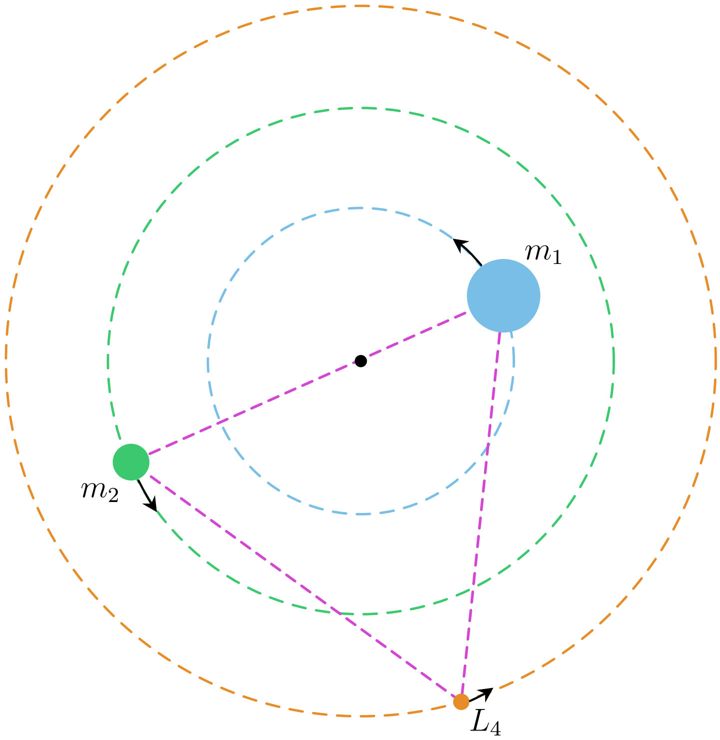
Consecuentemente

$$L_4 = \left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad L_5 = \left(\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Sustituyendo $\mu = 1/5$

$$L_4 = \left(\frac{3}{10}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad L_5 = \left(\frac{3}{10}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

b) [1] Haz un esbozo del movimiento de los tres cuerpos si el satélite se sitúa en L_4.



En el sistema inercial (con centro de masas fijo en el origen) las dos primarias describen una órbita circular a la misma velocidad angular, así como el satélite situado en L_4. De esta manera, en cada instante los tres vértices están a distancia fija $|P_1 - P_2| = 1$, formando un triángulo equilátero de lado 1, que rota rígidamente (sin deformarse) alrededor del centro de masas.

c) [2] Con los valores obtenidos en los apartados anteriores, probar que la función potencial

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1-\mu}{|P_1 - z|} + \frac{\mu}{|P_2 - z|} + \frac{1}{2}\mu(1-\mu), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\},$$

alcanza su mínimo absoluto en los puntos L_4 y L_5 y calcula el valor de la constante de Jacobi en esos puntos.

Sea $\rho_1 = |z - P_1|$ y $\rho_2 = |z - P_2|$. Buscamos expresar $|z|^2$ en función de ρ_1 y ρ_2. Primero

$$|z - P_1|^2 = |z|^2 + |P_1|^2 - 2zP_1$$
$$|z - P_2|^2 = |z|^2 + |P_2|^2 - 2zP_2$$

Multiplicando la primera por $(1-\mu)$ y la segunda por μ, y sumándolas, obtenemos

$$(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 = |z|^2 + (1-\mu)|P_1|^2 + \mu|P_2|^2 - 2z\cdot((1-\mu)P_1 + \mu P_2) \quad (1)$$

Como el centro de masas está en el origen, entonces $(1-\mu)P_1 + \mu P_2 = 0$, y además sabemos que $|P_1|^2 = \mu^2$ y $|P_2|^2 = (1-\mu)^2$, de donde

$$(1-\mu)|P_1|^2 + \mu|P_2|^2 = (1-\mu)\mu^2 + \mu(1-\mu)^2 = \mu(1-\mu) \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 = |z|^2 + \mu(1-\mu) \iff |z|^2 = (1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 - \mu(1-\mu) \quad (3)$$

Recuperando la función potencial dada en el enunciado, multiplicamos por 2 a ambos lados, obteniendo

$$2\Phi(z) = |z|^2 + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} + \mu(1-\mu), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}, \quad (4)$$

y sustituimos (3) en (4), llegando a

$$2\Phi(z) = [(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 - \mu(1-\mu)] + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} + \mu(1-\mu) =$$
$$(1-\mu)\rho_1^2 + \mu\rho_2^2 + \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2}$$

Factorizando con $(1-\mu)$ y μ, conseguimos la expresión cómoda

$$2\Phi(z) = (1-\mu)\left(\rho_1^2 + \frac{2}{\rho_1}\right) + \mu\left(\rho_2^2 + \frac{2}{\rho_2}\right) \quad (5)$$

Sea ahora la función

$$\begin{aligned} g:\ \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \rho &\longmapsto \rho^2 + \frac{2}{\rho} \end{aligned}$$

Vemos que

$$g'(\rho) = 2\rho - \frac{2}{\rho^2}, \quad g''(\rho) = 2 + \frac{4}{\rho^3} > 0 \quad \forall \rho > 0$$

Por lo que g es estrictamente convexa, y su mínimo global se alcanza en los puntos críticos $g'(\rho) = 0$, es decir,

$$g'(\rho) = 0 \iff 2\rho - \frac{2}{\rho^2} = 0 \iff \cancel{2}\rho = \frac{\cancel{2}}{\rho^2} \iff \rho^3 = 1 \iff \rho = 1$$

Además, $g(1) = 1 + 2 = 3$, y, por ser $\rho = 1$ mínimo, $g(\rho) \geqslant 3 \quad \forall \rho > 0$. Teniendo esto en cuenta, vemos que de (5) se deduce que

$$2\Phi(z) \geqslant (1-\mu) \cdot 3 + \mu \cdot 3 = 3 \Longrightarrow \Phi(z) \geqslant \frac{3}{2}$$

El mínimo de Φ se alcanza en caso de que $g(\rho_1) = 3 = g(\rho_2)$, es decir, $\rho_1 = 1 = \rho_2$, pero como $\rho_1 = |z - P_1| = 1 = |z - P_2| = \rho_2$, y los únicos puntos que verifican esto último son L_4 y L_5, por lo realizado en el apartado a), queda demostrado que Φ alcanza su mínimo absoluto en los puntos L_4 y L_5.

Falta calcular la constante de Jacobi en L_4 y L_5. Por definición,

$$J = 2\Phi(z(t)) - |\dot{z}(t)|^2$$

Como L_4 y L_5 son puntos de equilibrio en el problema restringido circular (demostrado en teoría), entonces la solución $z = z(t)$ es constante, $z(t) \equiv c$, luego $\dot{z}(t) \equiv 0$. Entonces $J(c) = 2\Phi(c)$, y como hemos visto que el mínimo absoluto de Φ se alcanza en L_4 y L_5, y además $\Phi(L_4) = \Phi(L_5) = 3/2$, concluimos que

$$J(L_4) = J(L_5) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$$